

Mini projet NF04: Système de refroidissement

Sacha Hénaff/Mathilde Rochais

Le but de ce projet est d'étudier la température dans une ailette d'un système de refroidissement. Pour cela, nous allons dans un premier temps étudier cette ailette en régime stationnaire afin de déterminer la température en différents points de celle-ci. Dans un second temps, nous étudierons l'évolution temporelle de la température au sein de cette ailette afin d'étudier son efficacité. Pour cela, il nous faudra déterminer un maillage optimal, ce qui nous permettra d'avoir un résultat fiable tout en limitant le plus possible le temps de calcul.

1 Approche stationnaire

L'équilibre thermique instationnaire est régi par l'équation suivante :

$$\rho_i C_{pi} e \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + e \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + 2h(T(x, y, t) - T_{air}) = 0 \quad \forall (x, y) \in A, \forall t > 0 \quad (1)$$

Avec pour le flux, la loi de comportement :

$$\vec{q} = -k_i \vec{\nabla} T$$

Nous étudions le problème en régime stationnaire, ainsi, nous avons :

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = 0$$

L'équation 1 devient donc :

$$\begin{aligned} -k_i \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T + 2h(T(x, y, t) - T_{air}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -ek_i \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2h(T(x, y, t) - T_{air}) &= 0 \end{aligned}$$

On a donc la forme intégrale du problème :

$$W_F = \int_S \psi \left(-ek_i \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2h(T(x, y, t) - T_{air}) \right) dS = 0$$

En utilisant l'intégration par partie, on peut écrire la forme faible du problème :

$$W = \int_S ek_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dS - \int_{\partial S} ek_i \psi \frac{\partial T}{\partial x} n_x ds + \int_S ek_i \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} dS - \int_{\partial S} ek_i \psi \frac{\partial T}{\partial y} n_y ds + \int_S 2h\psi(T(x, y, t) - T_{air}) dS = 0$$

$$\Leftrightarrow e \int_S ki < \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} > \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\} - e \int_{\partial S} \psi ki \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds + \int_S 2h\psi(T(x, y, t) - T_{air}) dS = 0$$

$$\Leftrightarrow e \int_S ki < \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} > \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} \right\} + e \int_{\partial S} q_n \psi ds + \int_S 2h\psi T(x, y, t) dS - \int_S 2h\psi T_{air} dS = 0$$

On commence par réaliser un maillage à la main comme ceci :

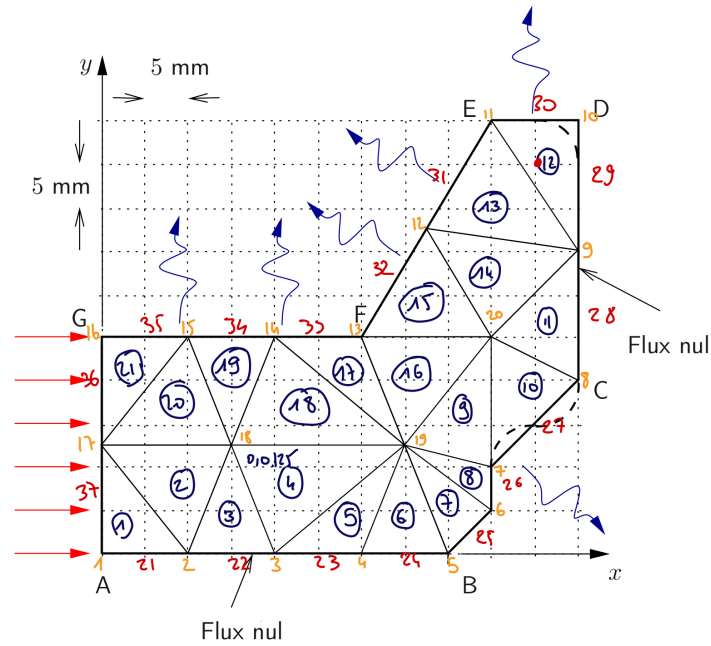


FIGURE 1 – Découpage de l'ailette en élément finis

On a donc le tableau des coordonnées et le tableau des connectivités suivants :

x	y
0	0
0.01	0
0.02	0
0.03	0
0.04	0
0.045	0.005
0.045	0.01
0.055	0.02
0.055	0.035
0.055	0.05
0.045	0.05
0.0375	0.0375
0.03	0.025
0.02	0.025
0.01	0.025
0	0.025
0	0.0125
0.015	0.0125
0.035	0.0125
0.045	0.025

TABLE 1 – Tableau des coordonnées

Noeud	k_1	k_2	k_3
1	1	2	17
2	2	18	17
3	2	3	18
4	3	19	18
5	3	4	19
6	4	5	19
7	5	6	19
8	6	7	19
9	7	20	19
10	7	8	20
11	8	9	20
12	9	10	11
13	9	11	12
14	9	12	20
15	20	12	13
16	20	13	19
17	13	14	19
18	19	18	14
19	14	18	15
20	15	18	17
21	15	17	16
22	1	2	0
23	2	3	0
24	3	4	0
25	4	5	0
26	5	6	0
27	6	7	0
28	7	8	0
29	8	9	0
30	9	10	0
31	10	11	0
32	11	12	0
33	12	13	0
34	13	14	0
35	14	15	0
36	15	16	0
37	16	17	0
38	17	1	0

TABLE 2 – Tableau des connectivités

Pour découper l'ailette, il nous faut :

- Des éléments triangulaires
- Des éléments linéaires (2 noeuds) pour les conditions aux limites de types Neumann
- Des éléments linéaires (2 noeuds) pour les conditions aux limites de types Cauchy

Pour décrire l'ailette, il nous faut les matrices élémentaires suivantes :

$$[k_{T3}^e] = \frac{k}{4A^e} \begin{bmatrix} y_{23}^2 + x_{32}^2 & y_{23}y_{13} + x_{32}x_{13} & y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21} \\ & y_{31}^2 + x_{13}^2 & y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21} \\ & & y_{12}^2 + x_{21}^2 \end{bmatrix} + h \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En effet, il faut penser à rajouter le terme lié à la convection dans le calcul de $[K^e]$.

$$\begin{aligned}\{f_{T3}^e\} &= \frac{fA^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \{f_{Neu}^e\} &= \frac{-\bar{q}l^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ [k_{Cau}^e] &= \frac{hl^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \{f_{Cau}^e\} &= \frac{hT_{ext}l^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

On calcul à la main les éléments $[B]$ et $[K^e]$ pour les éléments notés 3 et 18 sur la Figure 1. Les coordonnées des points formants l'élément 3 sont :

$$vcor = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.02 & 0 \\ 0.015 & 0.0125 \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$[B] = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}$$

avec :

$$A^e = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

On obtient : $A^3 = 6.25 \cdot 10^{-5}m^2$, et donc :

$$[B^3] = \begin{bmatrix} -100 & 100 & 0 \\ -40 & -40 & 80 \end{bmatrix}$$

On sait que :

$$[k^e] = k[B]^t[B]A^e$$

On a :

$$[B]^t = \begin{bmatrix} -100 & -40 \\ 100 & -40 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$$

On obtient finalement :

$$[K^3] = \begin{pmatrix} 0.280788 & -0.202181 & -0.076731 \\ -0.202181 & 0.280787 & -0.076731 \\ -0.076731 & -0.076731 & 0.155338 \end{pmatrix}$$

En faisant de même pour l'élément numéroté 18 sur la Figure 1, on obtient :

$$[K^{18}] = \begin{pmatrix} 0.296200 & -0.061787 & -0.230663 \\ -0.061787 & 0.141800 & -0.076263 \\ -0.230663 & -0.076263 & 0.310675 \end{pmatrix}$$

En utilisant le script `blin.m`, on peut vérifier ces calculs puisque ces matrices sont calculées pour chaque élément : on obtient bien :

<code>ie = 3</code> <code>vke =</code> 0.280788 -0.202181 -0.076731 -0.202181 0.280787 -0.076731 -0.076731 -0.076731 0.155338	<code>ie = 18</code> <code>vke =</code> 0.296200 -0.061788 -0.230662 -0.061788 0.141800 -0.076263 -0.230662 -0.076263 0.310675
---	--

FIGURE 2 – Valeurs de $[K^3]$ à gauche et $[K^{18}]$ à droite

On retrouve bien les mêmes matrices pour nos deux éléments, ce qui nous confirme que les données de la Figure 3 sont cohérentes.

```

vprel_T3=[3434.200 0.386 2700 2*h 0 0
3750.000 0.050 2700 2*h 0 0];
vprel_Neumann=[-75 0 0
0 0 0];
vprel_Cauchy=[h/1000 30 0
0 0 0 ];

```

FIGURE 3 – Valeurs utilisées pour les calculs des scripts blin.m et btemp.m

En utilisant le même script , on peut déterminer le gradient de température dans l'ailette en régime stationnaire. En rentrant les tableaux de coordonnées et de connectivités dans matlab, on obtient :

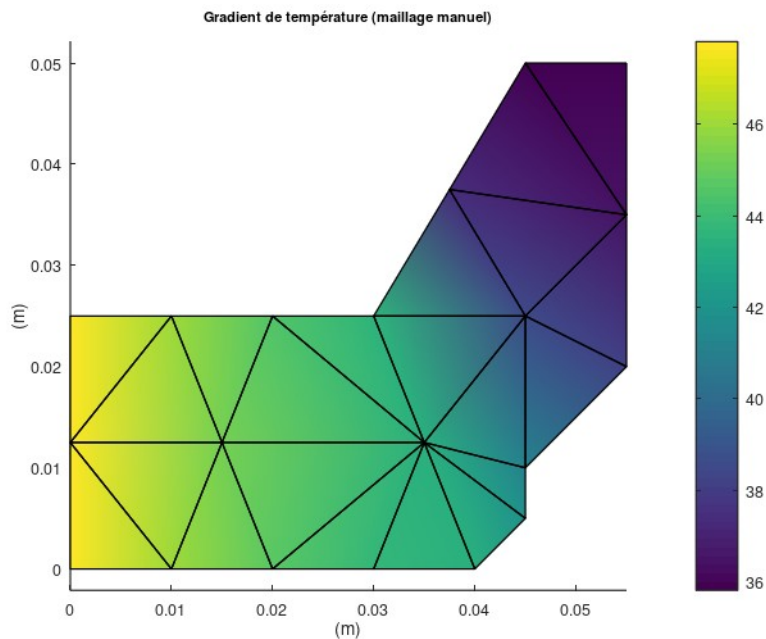


FIGURE 4 – Gradient de température calculé avec le maillage de la Figure 1

On voit que la chaleur diffuse dans l'ailette qui monte à $47.807108^{\circ}C$ sur le face AG et descend jusqu'à $36^{\circ}C$ au bout de l'ailette.

On va maintenant déterminer le maillage optimal, qui permet de tendre vers une solution qui ne varie pas avec le maillage. Pour cela, on se propose d'étudier la température en un point en fonction de la taille du maillage. On se place au point (0,0) et on trace l'évolution de sa température lorsque le maillage est de plus en plus petit.

On part du maillage suivant, qui sera le plus grossier de notre étude :

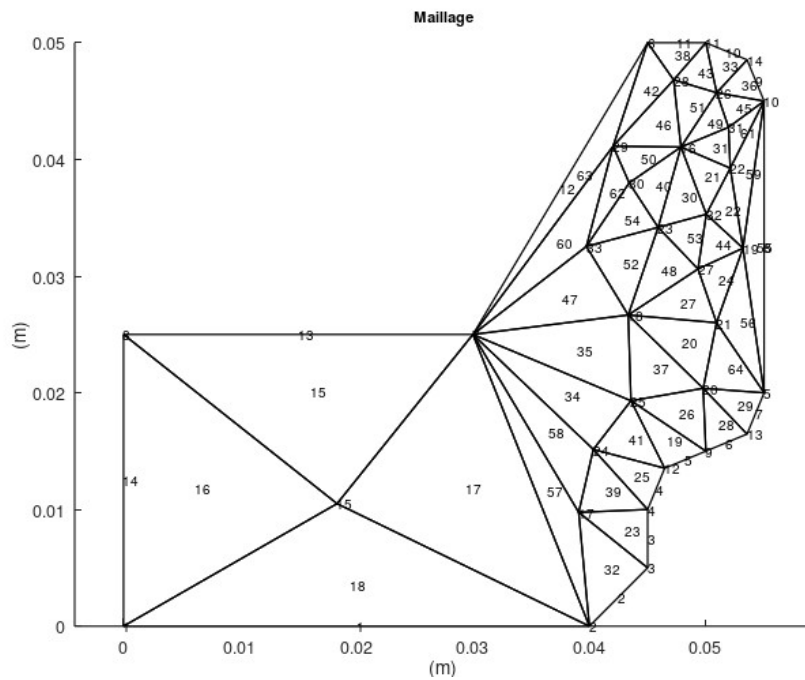


FIGURE 5 – Maillage le plus grossier qui sera étudié (taille d'élément= $0.04m$)

On voit sur la Figure 5 que la maillage dans les deux matériaux n'est pas aussi fin. En effet, étant donné que nous avons utilisé plus de points (9 points) pour décrire le contour de la partie en acier que pour décrire le contour de la partie en cuivre (4 points), le logiciel n'arrive pas à mailler plus gros que ce que l'on voit sur la Figure 5.

On affine notre maillage petit à petit pour atteindre une taille $0.00025m$ qui est si petit que cela ne représente pas intérêt de le montrer ici.

En traçant la température au point étudié en fonction de la taille des éléments, on obtient :

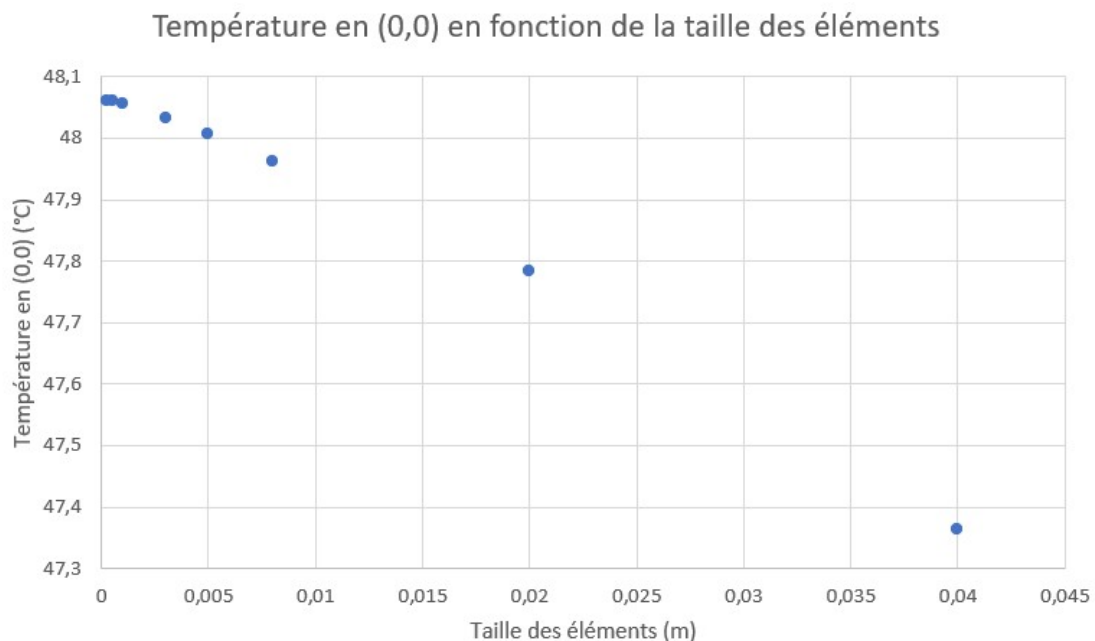


FIGURE 6 – Température en (0,0) en fonction de la taille des éléments

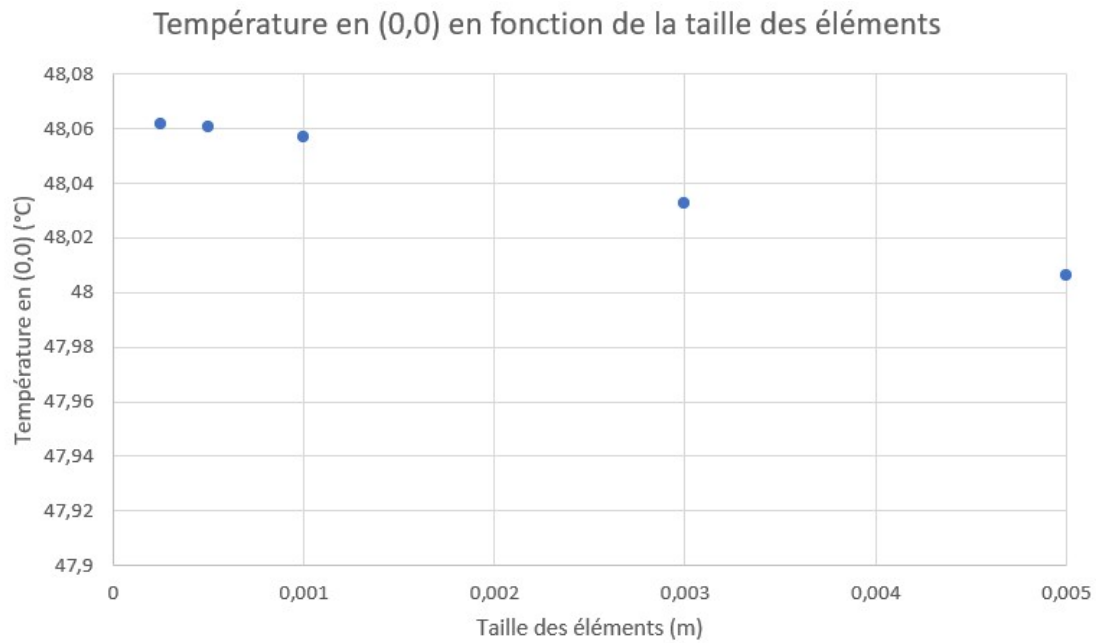


FIGURE 7 – Température en $(0,0)$ en fonction de la taille des éléments (zoom sur les valeurs pour des éléments de petite taille)

On voit que pour des éléments plus petits que $0.001m$, la valeur de température au point $(0,0)$ ne varie que des quelques millièmes de degrés. De plus, on a les temps de calcul suivants :

Taille des éléments (m)	Temps de calcul (s)
0,001	2.75
0,0005	12
0,00025	220

TABLE 3 – Temps de calcul pour les tailles d'éléments proches de la valeur maximale de température

On voit qu'en passant d'éléments de $0.001m$ à $0.0005m$, on multiplie le temps de calcul par presque 4, et en passant de $0.0005m$ à $0.00025m$, on multiplie par 18 le temps de calcul. Ainsi, pour se rapprocher de quelque millième de degrés de la température maximale théorique, on augmente grandement le temps de calcul.

Ainsi, il nous paraît cohérent de prendre des éléments de $0.001m$, ce qui nous donne une bonne précision, tout en limitant le temps de calcul. On obtient finalement le maillage suivant que l'on considère comme optimal :

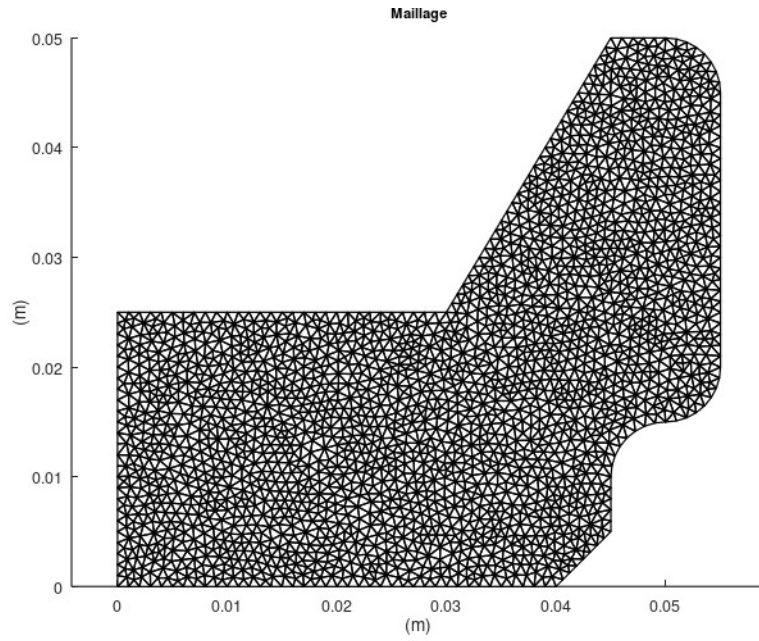


FIGURE 8 – Maillage choisi pour la suite de l'étude

En utilisant le maillage de la Figure 8, on obtient le gradient de température suivant :

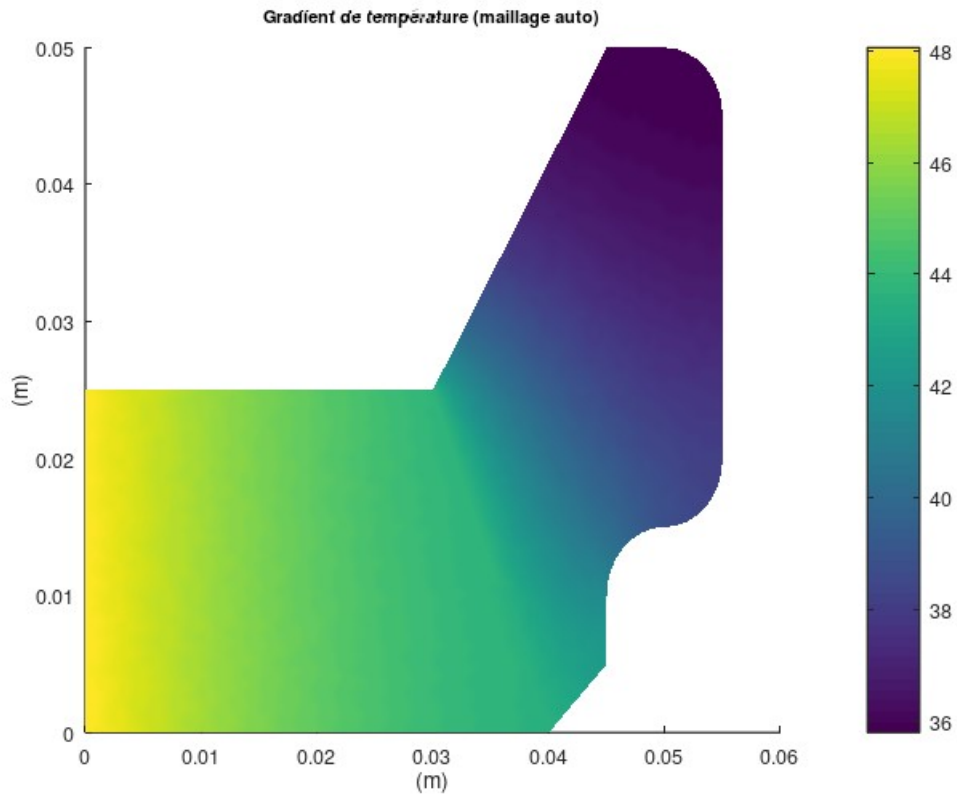


FIGURE 9 – Gradient de température dans l'ailette obtenu avec le maillage optimal

On voit sur la Figure 9 que la température monte maintenant jusqu'à $48.057120^\circ C$ et la température la plus basse est toujours à $36^\circ C$.

On peut maintenant calculer le flux dans chaque élément de l'ailette de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\} = [B] \left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right\}$$

On obtient finalement :

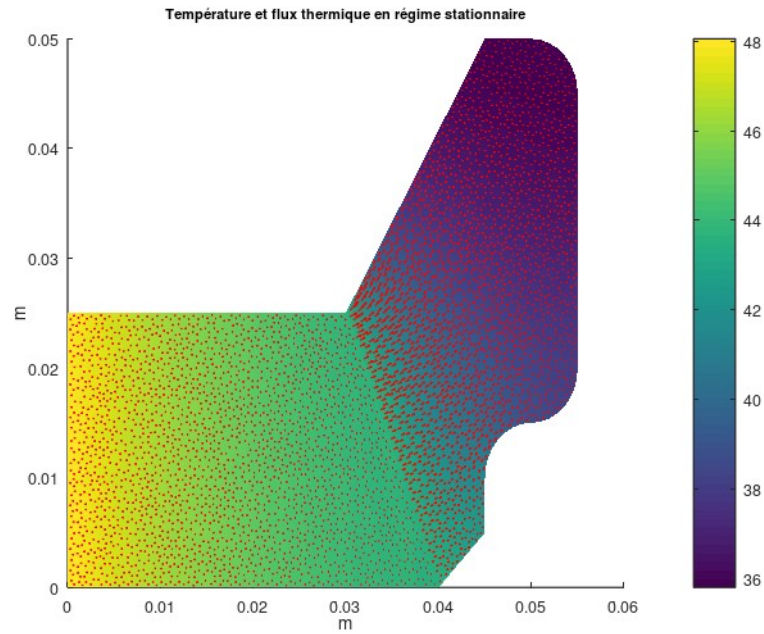


FIGURE 10 – Flux et gradient thermique dans l'ailette en régime stationnaire

On zoom aussi à l'interface entre les deux matériaux :

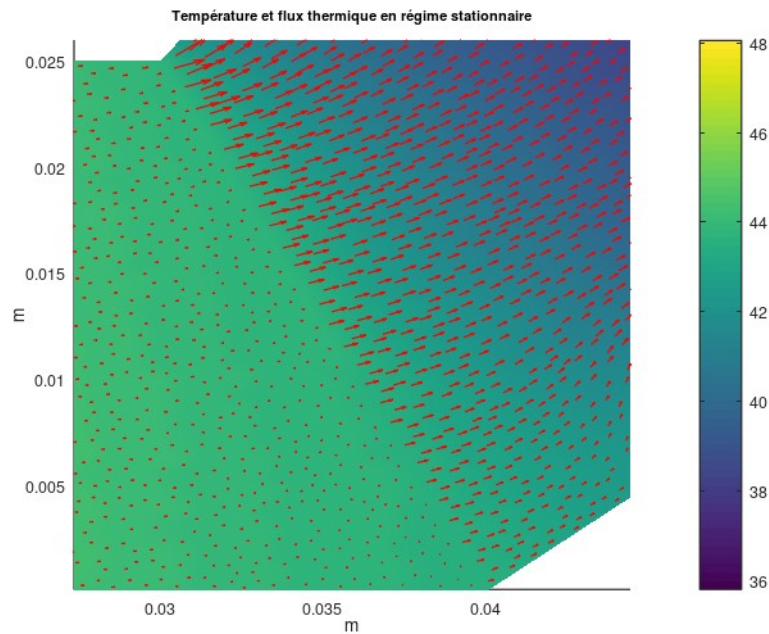


FIGURE 11 – Zoom sur l'interface entre les deux matériaux

On voit qu'à l'interface entre les deux matériaux, on a une discontinuité du flux thermique, causé par les différences entre les propriétés thermiques du cuivre et de l'acier.

On peut maintenant étudier la sensibilité du système de refroidissement sur le coefficient d'échange h en le faisant varier de $\pm 20\%$

On obtient :

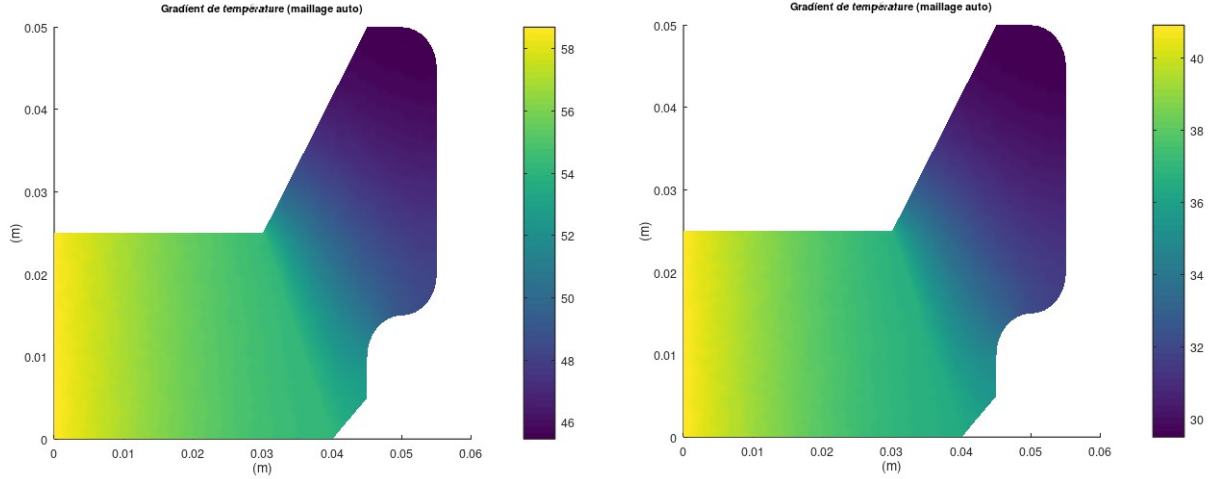


FIGURE 12 – Gradient de température avec $h = 36$ (à gauche) et $h = 54$ (à droite)

On voit que la température est plus élevée dans l'ailette avec $h = 36$ ($T = 58^\circ C$) qu'avec $h = 54$ ($T = 40^\circ C$). Effectivement, si h est plus petit, il y a moins de convection et donc la température dans l'ailette est plus élevée.

2 Approche transitoire

On étudie maintenant la variation transitoire de la température dans l'ailette.

On rappelle la forme discrète de la matrice masse liée au terme instationnaire de l'équation 1 :

$$[M^e] = \rho C \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On sait que pour qu'un schéma explicite soit stable, on doit avoir : $\Delta t \leq \frac{1}{l_i^{max}}$ où l_i^{max} est la plus grande valeur propre de $[M]^{-1}[K]$. On sait aussi que la période du transitoire est : $T = \frac{5}{l_i^{min}}$ où l_i^{min} est la plus petite valeur propre de $[M]^{-1}[K]$.

En programmant ce calcul dans Matlab, on obtient : $\Delta t_c = 0.000220s$ et $T = 193.225025s$

Ainsi, pour que le schéma explicite soit stable dans notre cas, il faudrait calculer au moins $\frac{T}{\Delta t_c} \simeq 900\,000$ pas de temps, ce qui serait beaucoup trop long. On choisira donc un schéma implicite pour réaliser ces calculs. Ce choix nous permettra de choisir un pas de temps plus long (on prendra $\Delta t_c = 1s$ pour la suite des calculs), ce qui ne sera pas pénalisant étant donné la dynamique assez lente du système.

En calculant 200 pas de temps (soit $200s$, ce qui est plus que suffisant pour observer le transitoire ainsi que le régime permanent), on obtient :

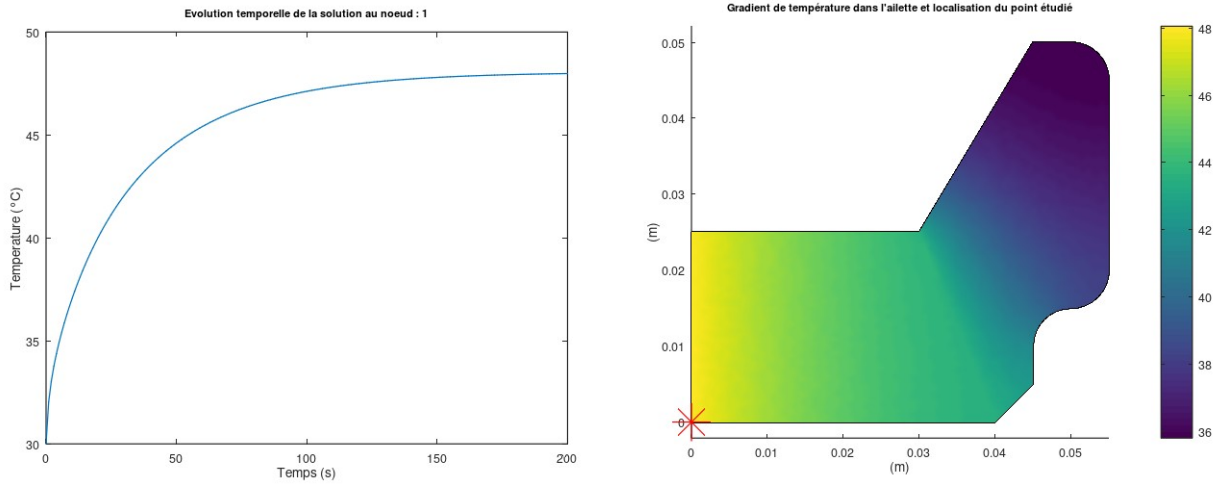


FIGURE 13 – Température au cours du temps au point 15 (gauche) et localisation du noeud 15 (droite)

On voit donc que le schéma est stable (ce qui semble évident puisque le schéma implicite est inconditionnellement stable) et tend vers la solution que nous avons trouvé lors de la partie sur le régime permanent.

On va maintenant essayer de déterminer si la combinaison de ces matériaux aurait pu être plus efficace en inversant leur place, on obtient dans ce cas :

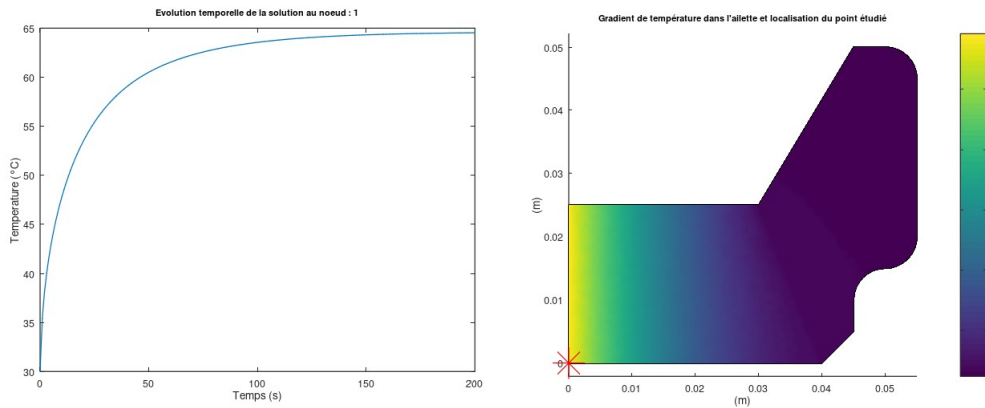


FIGURE 14 – Température au cours du temps au point 15 (droite) et température dans l'ailette en régime permanent (gauche)

On voit sur la Figure 14 que la température monte plus haut (60°C dans cette configuration contre 48°C contre la configuration initialement proposée) dans l'ailette et n'est pas du tout répartie de la même manière que dans la configuration précédente. Ce résultat n'est pas surprenant étant donné que le cuivre a un meilleur coefficient d'échange thermique que l'acier.

Ainsi, on peut dire que la configuration proposée en début de sujet est la meilleure des deux.

3 Conclusion

Après avoir trouvé un maillage adapté, nous avons donc pu étudier le comportement thermique de l'ailette en régime transitoire ainsi que voir l'impact de la convection sur la température. Nous avons ensuite pu déterminer comment la température évolue au sein de l'ailette au cours du temps. Pour se faire, nous avons dû déterminer si l'utilisation d'un schéma explicite était raisonnable (notamment en temps de calcul), ce qui n'est pas le cas. Nous avons donc choisi d'utiliser un schéma implicite qui est inconditionnellement stable. Enfin, nous avons déterminé que la configuration proposée dans le sujet était meilleure que celle où nous interchangeons les matériaux.